

Scaffolding ako didaktický prostriedok v riešiteľskom procese matematických úloh

Scaffolding as a Didactic Tool in the Problem-Solving Process of Mathematical Problems

Lucia Csachová^a – Annamária Šimšíková^b

^a*Department of Mathematics, Faculty of Education, Catholic University in Ružomberok, Hrabovská 1, 034 01, Ružomberok, Slovakia*

^b*Department of Elementary and Primary Education, Faculty of Education, Catholic University in Ružomberok, Hrabovská 1, 034 01, Ružomberok, Slovakia*

Received November 24, 2025; received in revised form December 30, 2025; accepted January 18, 2026

Abstract

The article examines the use of scaffolding as a supportive tool in the process of solving (not only) mathematical problems. It presents selected didactic applications that illustrate how purposefully formulated questions and procedures can differentiate the level of support provided to students and foster their understanding. The empirical part is based on the analysis of a word problem from the external part of the mathematics graduation examination, demonstrating the potential of scaffolding to intervene at individual phases of the problem-solving process – from understanding the problem to reflection, verification, and searching for alternative solving approaches (looking back). The findings suggest that the thoughtful integration of scaffolding, including its lateral forms, can enhance students' problem-solving competencies, support their metacognitive processes, and foster conditions for adaptive and productive mathematical learning.

Keywords: scaffolding, laterálny scaffolding, riešiteľský proces, riešiteľské stratégie

Classification: 97D50, 97C30

Úvod

Výsledky medzinárodného testovania PISA 2018 a PISA 2022 poukazujú na pretrvávajúci nedostatočný výkon slovenských pätnásťročných žiakov v matematike v porovnaní s priemernými výsledkami OECD. (NIVAM 2019, 2023) Tieto zistenia naznačujú potrebu podpory pri rozvoji matematických schopností, ktoré sú nielen testované v medzinárodných a národných meraniach, ale sú dôležité vo všeobecnosti vo vzdelávaní. Súčasne prebiehajúca reforma vzdelávania na Slovensku výrazne mení kontext vyučovania matematiky nielen na základných školách, ale i stredných školách a ministerstvo školstva plánuje zavedenie povinnej maturity z matematiky so systémom dvoch úrovní. Zavedenie povinnej maturity zvyšuje tlak na to, aby školy systematicky rozvíjali najmä schopnosť riešiť matematické úlohy.

*Corresponding author: lucia.csachova@ku.sk
DOI: 10.17846/AMN.2026.10.1.18-30

Cieľom tohto článku je preskúmať úlohu scaffoldingu v procese riešenia matematických úloh v školskej matematike a zároveň zasadiť túto pedagogickú stratégiu do kontextu matematického vzdelávania a aktuálnych požiadaviek zo strany medzinárodných i národných inštitúcií. Scaffolding, koncipovaný ako súbor dočasných podporných zásahov učiteľa alebo kompetentnejšieho rovesníka, ktorý umožňuje žiakovi prekročiť jeho aktuálne samostatné možnosti a dosiahnuť vyššiu úroveň riešenia problémov, môže byť vhodným nástrojom pre rozvoj zložitejších kognitívnych zručností vrátane matematického modelovania a aplikovaného riešenia úloh (Vygotsky, 1978; Wood, Bruner and Ross, 1976).

V článku predstavíme problematiku scaffoldingu a jeho didaktické realizácie, typy scaffoldingu, potom predstavíme jeho možné využitie v riešiteľskom procese, a navrhneme, ako by postupy scaffoldingu mohli byť integrované do riešiteľského procesu tak, aby viedli k vyššej úspešnosti.

Scaffolding

Pod scaffoldingom sa chápe proces, *„ktorý umožňuje dieťaťu alebo začiatovníkovi vyriešiť problém, vykonať úlohu alebo dosiahnuť cieľ, ktorý by bez pomoci nebol schopný zvládnuť. Táto podpora spočíva v tom, že dospelý kontroluje prvky úlohy, ktoré sú spočiatku nad schopnosťou učiaceho sa, a tým mu umožňuje sústrediť sa a dokončiť iba tie časti, ktoré zvládne“* (Wood, Bruner and Ross, 1976, s. 90).

Hlavným cieľom tejto podpornej štruktúry je *„postupné vedenie žiakov – učitelia poskytujú ciele podporu, ktorá sa postupne znižuje, čím žiaci získavajú väčšiu samostatnosť“* (Salam et al., 2024). Znižovanie priamej podpory umožňuje žiakom prebrať zodpovednosť za svoje riešenia. *„Dobre vykonaný scaffolding začína tým, že dieťa je vedené k činnostiam, ktoré mu umožnia dosiahnuť rozpoznateľné riešenia. Keď sa toto podarí, tútor môže interpretovať rozdiely medzi správnymi a nesprávnymi riešeniami dieťaťa“* (Wood, Bruner and Ross, 1976, s. 98).

Vzhľadom na osobitosti riešiteľa sa zmieňujeme o limitoch schopnosti riešiť úlohu samostatne. Opierame sa o sociologicky podmienený vývoj, ktorý reprezentuje *teória zóny proximálneho vývoja (Zone of Proximal Development, ďalej ZPD)* od L. Vygotského, zdôrazňujúci sociálnu interakciu, ako kľúčovú úlohu interpersonálneho prenosu informácie pri učení. Definuje priestor, kde sa učenie odohráva, teda medzi tým, čo dieťa dokáže samostatne, a tým, čo dokáže s pomocou kompetentnej osoby. Termín „proximálny“ sa v tomto prípade vzťahuje na zručnosti, ktorými je žiak „blízko“ k zvládnutiu (McLeod, 2025). Predstavuje *„vzdialenosť medzi skutočnou vývojovou úrovňou určenou nezávislým riešením problémov a úrovňou potenciálneho rozvoja určenou riešením problémov pod vedením dospelých alebo v spolupráci so schopnejšími rovesníkmi“* (Vygotsky, 1978, s. 86).

Schopnosť operovať s matematickými stratégiami závisí od kognitívnej zrelosti žiaka. Pri zohľadnení kognitívnych determinantov sa opierame o teóriu kognitívneho vývoja J. Piageta (Piaget & Inhelder, 1997), ktorý sa primárne zameriava na individuálny kognitívny vývin a biologickú zrelosť, predstavuje diskkrétne, vekovo ohraničené štádiá kognitívneho vývoja – vyberáme štádium konkrétnych operácií (7-11 rokov) a štádium formálnych operácií (od 12 rokov).

Ďalej sa opierame o teóriu kognitívnej reprezentácie poznania od J. Brunera, podľa ktorej vývin predstavuje kontinuálny proces. Bruner (1973; Wood, Bruner and Ross, 1976) uvádzal, že osvojovanie zručností u dieťaťa možno produktívne chápať ako hierarchický proces. V ňom sa

jednotlivé zručnosti kombinujú do „vyšších zručností“, a to prostredníctvom vhodného usporiadania, aby spĺňali nové a zložitejšie požiadavky na úlohy. Bruner rozvinul teóriu reprezentácie poznania, v ktorej identifikoval tri základné spôsoby, ako ľudia kódujú a organizujú informácie pri uchopení poznania sveta okolo seba. Jedná sa o procesy: enaktívnu reprezentáciu (učenie činnosťou), ikonickú reprezentáciu (učenie prostredníctvom obrazov) a symbolickú reprezentáciu (učenie pomocou jazyka a symbolov). Tieto procesy sa menia a vyvíjajú v priebehu času a vzájomne sa prelínajú. Jednotlivé matematické stratégie v riešiteľskom procese je možné demonštrovať na úrovni enaktívnej alebo ikonickej reprezentácie. Východisko scaffoldingu pre učiteľa spočíva v identifikácii kognitívnych a exekutívnych funkcií dieťaťa: *Čo už dieťa zvládne? V čom je obmedzenie?*

ZPD predstavuje základný teoretický rámec pre Brunerov scaffolding (Wheeler, 2022), a súčasne sa ZPD stala synonymom scaffoldingu. Bruner myšlienku Vygotského rozpracoval do praktickej stratégie výučby, kde riešil, ako podporu realizovať. Obhajoval myšlienku dynamického procesu, kde podpora kompetentnou osobou koreluje so samostatnosťou dieťaťa, a teda sa jedná o dočasnú podporu, ktorá sa postupne odstraňuje vzhľadom na potreby dieťaťa.

McLeod (2025) uvádza tri typy úloh podľa troch odlišných zón alebo oblastí učenia sa určujúcich schopnosť žiaka zvládnuť úlohu, teda ju vyriešiť:

1. *skutočná úroveň vývoja (komfortná zóna)* – Úlohy, ktoré žiak vykonáva samostatne bez akéhokoľvek vedenia podpornej kompetentnej osoby.
2. *zóna proximálneho rozvoja (ZPD) (zóna učenia)* – Úlohy, ktoré žiak nedokáže vyriešiť samostatne, ale môže ich zvládnuť s vedením a podporou kompetentnej osoby. Žiak pozná časti úlohy, má určité predpoklady na riešenie ale ich nedokáže sám správne spojiť do celku. Je to priestor na naučenie novej zručnosti.
3. *za hranicami ZPD (zóna frustrácie)* – Úlohy, ktoré žiak nedokáže vyriešiť a to dokonca ani s pomocou kompetentnej osoby. Tieto úlohy sú príliš zložité, či abstraktné pre kognitívne schopnosti žiaka, ktorými disponuje, čo vedie žiaka k frustrácii a demotivácii. S rastom ZPD, sa niektoré z týchto úloh presunú do ZPD.

Scaffolding a rovesnícka mediácia pri matematických stratégiách fungujú efektívne do úrovne, kedy je možné externalizovať súčasti matematickej stratégie a vizualizovaným spôsobom ich sprostredkovať, modelovať, a tak sú žiaci následne schopní procesy napodobňovať a osvojiť si ich v rámci učenia. Cieľom štúdie je poukázať práve na opodstatnenie scaffoldingu v rámci riešenia úloh, kde konkrétnou technikou – externalizáciou súčastí matematickej úlohy, možno napomôcť k prechodu zo zóny frustrácie do zóny učenia.

Laterálny scaffolding je špecifická forma scaffoldingu zameraná na podporu žiakov pri riešení problémov (nielen matematických) prostredníctvom paralelných, alebo doplnkových informácií. Na rozdiel od tradičného scaffoldingu, ktorý postupne vedie žiakov k samostatnosti, laterálny scaffolding poskytuje alternatívne cesty na pochopenie konceptov a riešenie úloh (Srinivas & Gireesh, 2025). Ku kľúčovým prvkom tohto typu autori zaraďujú:

- *viacero riešiteľských stratégií* – žiaci dostávajú rôzne prístupy k riešeniu úloh, čo im umožňuje vybrať si tú riešiteľskú metódu či stratégiu, ktorá im najviac vyhovuje,
- *podpora kritického myslenia* – žiaci sú vedení k porovnávaniu rôznych riešení, čím sa zlepšuje ich schopnosť analyzovať a hodnotiť informácie,

- *flexibilné učenie* – umožňuje prispôsobenie výučby individuálnym potrebám žiakov, čím sa zvyšuje ich angažovanosť,
- *zníženie kognitívnej záťaže* – poskytovanie doplnkových informácií pomáha žiakom lepšie pochopiť koncepty bez toho, aby boli zahltení príliš veľkým množstvom nových informácií.

Medzi metódy laterálneho scaffoldingu Srinivas & Gireesh (2025) zaraďujú:

- *vizuálny scaffolding* – využívanie diagramov, grafov a rôznych vizuálnych reprezentácií na podporu pochopenia matematických konceptov,
- *sekvenčný scaffolding* – postupné vedenie žiakov riešením úlohy pomocou krokových inštrukcií,
- *interaktívny scaffolding* – zapojenie žiakov do diskusií a tímovej práce pri riešení matematických úloh,
- *reflexívny scaffolding* – podpora študentov pri hodnotení vlastného riešenia a hľadani alternatívnych prístupov k riešeniu.

Pri tradičnom scaffoldingu učiteľ poskytuje postupnú pomoc a postupne ju redukuje, aby žiak dosiahol samostatnosť. Tento prístup funguje dobre pri nových konceptoch, kedy žiak potrebuje systematické vedenie a postupné kroky, aby si osvojil základné princípy. Laterálny scaffolding je viac flexibilný, vhodný v prípade, že žiak disponuje základmi a potrebuje rozvíjať analytické myslenie. Tento typ umožňuje využívať alternatívne cesty pre riešenie úloh, pomáha žiakom experimentovať s rôznymi riešiteľskými stratégiami a podporuje kreatívne myslenie, čo je užitočné pri zložitejších úlohách. Podľa Srinivas & Gireesh (2025) vysokoškolskí študenti využívajúci laterálne scaffoldovanie dosahovali vyššiu presnosť pri riešení matematických úloh.

Laterálny scaffolding umožňuje učiteľovi poskytnúť viacero riešiteľských stratégií. Žiaci tak dostávajú rôzne prístupy k riešeniu problému, čo im umožňuje vybrať si vyhovujúci prístup. („Vyhovujúci“ pritom môže znamenať rýchly či efektívny z pohľadu času alebo schopností žiaka a môže to byť veľmi subjektívne.) Zároveň dochádza k podpore kritického myslenia, kedy sú žiaci vedení k porovnávaniu rôznych riešení, čím sa zlepšuje ich schopnosť analyzovať a hodnotiť informácie.

Na prínos scaffoldovania v rámci matematického vzdelávania poukazuje viacero štúdií. Scaffolding predstavuje účinnú metódu matematického učenia (Amiripour et al., 2012), ale i užitočný koncept matematického vzdelávania (Bakker et al., 2015). Môže podporiť lepšie výsledky v matematike (Murdiyani, 2013; Kusmaryono et al., 2020), znížiť úzkosť z matematiky (Kusmaryono et al., 2020), zlepšiť porozumenie u študentov so slabými výsledkami v učení sa matematiky (Merliza et al., 2016), či zlepšiť kritické myslenie pri učení sa matematiky (Nugroho, 2017). Je potrebný na prekonanie algebraických chýb študentov na základe kognitívneho konfliktu (Maharani and Subanji, 2018), môže podporiť študentov so špeciálnymi potrebami na základe ich úrovne chýb (Jannah et al., 2019), riešiť rôzne typy koncepčných konštrukčných chýb pri riešení matematických problémov (Isnania et al., 2021). Je vhodný pri algebraických operáciách (Rachmawati et al., 2023; Nurfadila et al., 2024), ale i pri riešení úloh s číselnými vzormi, pri ktorých sa zapájajú duálne procesy myslenia (Firnanda, & Susiswo, 2024). Scaffolding má potenciál využitia v modeli výučby založenom na riešení problémov (PBL) (Zumbach, Reimann, 2003; Salam et al., 2024). Implicitne atribúty scaffoldingu implementované vo výučbe predstavujú benefity.

Potenciálnymi úlohami učiteľa v scaffoldingu je zabezpečenie procesuálnych prvkov:

- a) *identifikácia zóny proximálneho vývoja (ZPD) žiaka* – učiteľ zisťuje úroveň ZPD. Overuje tak, či žiak rozumie zadaniu – potrebným matematickým pojmom, ovláda základné matematické operácie, teda pozná jednoduché súčasti úlohy. Fáza zabezpečuje, že žiaci sú schopní začať riešiť úlohu.
- b) *predstavenie novej úlohy na bode zóny proximálneho rozvoja,*
- c) *rozdelenie úlohy na menšie pre žiaka zvládnuteľné kroky,*
- d) *podporovanie diskusie a zdieľanie,*
- e) *usmernenie formou usmerňujúcich otázok,* ktoré viedú k hlbšiemu premýšľaniu (Rachmawati et al., 2023; Zeng, 2024) a podporujú kritické myslenie (Zeng, 2024),
- f) *využitie diferenciacie žiakov a rovesníckeho vplyvu* – učiteľ podporuje spoluprácu a diskusiu medzi žiakmi, aby došlo k vzájomnej výmene nápadov a učeniu sa (Zeng, 2024). Umožňuje žiakom, aby si porovnali svoje riešenia a diskutovali o ich efektívnosti.
- g) *vytváranie príležitostí na precvičovanie,*
- h) *prenos zodpovednosti na žiaka,* aby prešiel k samostatnému riešeniu úlohy.

Vzhľadom na úroveň zodpovednosti, aplikuje učiteľ poskytovanie dočasnej podpory (*guiding*):

1. *sprievodná fáza (guided)* (Buttuler, 2025) je charakteristická metodicky riadenou formou pomoci zameranou na prekonanie bloku, ktorý je nad rámec schopností žiaka. Učiteľ (alebo i skúsenejší žiak) poskytujú dočasnú podporu. Realizuje sa to formou ukážky, „návodných“ otázok, pripomienok, tipov či pomôcok. Zabezpečí sa tak priestor pre zistenie chyby v priebehu jednotlivých krokov demonštrovania postupu a nie až po vysvetlení postupu, kedy už žiak nevníma súčasti od miesta, kde už nechápal.
2. *postupné dozrievanie a sťahovanie, odstraňovanie podporných prvkov v čase (fading)* (Lajoie, 2005; Buttuler, 2025). Ak žiak začína chápať vnútornú logiku či postup, učiteľ znižuje formu pomoci. Nastáva prechod od kontroly a priamej pomoci cez pripomienkovanie až k samostatnosti. Učiteľ zasahuje včas (napr. drobnou nápodvedou), aby študent nezišiel z „guidepath“ (Lajoie, 2005).
3. *zóna samostatného výkonu (fade out)*, v ktorej žiak samostatne aplikuje naučené kroky a bez pomoci dokáže použiť postup. Pri novej úlohe presne vie, čo a prečo má robiť.

Na základe úrovne zodpovednosti žiaka učiteľ predstavuje alebo poskytuje podľa potreby:

1. Aplikácia stratégií – učiteľ môže:

- predstaviť riešiteľskú stratégiu vhodnú pre riešenie,
- vytvárať vhodné prostredie a podmienky, ktoré žiakom umožňujú experimentovať s rôznymi riešiteľskými prístupmi a objavovať tak nové riešenia. Okrem bežných riešiteľských schopností tým podporuje aj rozvoj kreatívneho riešenia úloh (Zeng, 2024),
- povzbudiť žiaka, aby skúšal rôzne prístupy k riešeniu úlohy. Rozvíja to aktívne učenie sa (Zeng, 2024) i kritické myslenie (Salam et al., 2024; Srinivas & Gireesh, 2025),

- usmerniť žiakov pri výbere správnych stratégií tak, aby sami rozpoznali, ktorý riešiteľský prístup je najvhodnejší pre konkrétny typ problému (Zeng, 2024).
2. **Práca s chybou** – učiteľ umožňuje žiakovi zlyhať (Nance, 2024), akceptuje chyby ako súčasť učenia sa, nehodnotí okamžite a pomáha pri identifikácii chyby. Ak žiak nedokáže chybu identifikovať, učiteľ poskytuje pozitívnu spätnú väzbu aj s vysvetlením a poukázaním na správne kroky. Následne podnieti žiaka alebo skupinu k diskusii o oprave. Využije pritom silu sociálnej skupiny, žiaci so správnym riešením predstavujú svoje postupy, kým žiak zisťuje, v ktorom kroku sa odlišuje od postupu rovesníka.
 3. **Dohľad a spätná väzba, kontrola** – učiteľ dohliada nad dodržiavaním plánu, usmerňuje žiakov a poskytuje priebežnú a konštruktívnu spätnú väzbu.
 4. **Prostriedky** – učiteľ poskytuje rôzne prostriedky napr. diagramy, grafy či rôzne vizuálne reprezentácie na pochopenie či zaznamenávanie dosiahnutých výsledkov (Martin et al., 2018).

Použitie scaffoldingu pri riešení úlohy

Naším zámerom je podporiť žiaka v tom, aby sa riešenia úlohy nevzdal ešte pred jeho začiatkom, a aby pristupoval k úlohe spôsobom a na úrovni, ktorá zodpovedá jeho veku a individuálnym schopnostiam. Tento zámer sa netýka len situácií národných či medzinárodných testovaní či školského preverovania, ale vo všeobecnosti celého procesu matematického vzdelávania.

O poskytovaní pomoci a podpory žiakom v rámci scaffoldingu uvažujeme v súlade s fázami procesu riešenia úlohy podľa G. Polya (Polya, 1957): *porozumenie úlohy, navrhnutie plánu riešenia, realizácia plánu a pohľad späť*. Tieto štyri fázy na seba nadväzujú, plynule prechádzajú z jednej do druhej a sú tiež vzájomne prepojené (Klerlein, Hervey, 2019). Vynechanie niektorej z nich či formálne prevedenie riešenia môžu mať za následok neporozumenie riešenia úlohy ako celku. Prepojenie jednotlivých fáz nie je podstatné len v rámci jedného cyklu riešenia úlohy. Úvodná fáza, v ktorej sa žiak oboznamuje s úlohou, nadväzuje aj na jeho predchádzajúce matematické skúsenosti. Porozumieť novej úlohe často znamená vrátiť sa k už riešeným situáciám z iných úloh a využiť poznatky získané v minulosti (Applebaum, Leikin, 2007). Otázky a pokyny, ktoré učiteľ kladie v jednotlivých fázach, môžu byť na rovnakom princípe ako tie, ktoré Polya uvádza pre jednotlivé fázy riešiteľského procesu v úvode svojej knihy, napr. (Polya, 1957, s. xvi-xvii). (Ich voľne upravené varianty uvádzame pri jednotlivých etapách riešiteľského procesu v nasledujúcom texte.)

Pred zadaním úlohy by sa mal učiteľ uistiť, že žiak disponuje skúsenosťami s matematickými operáciami a riešiteľskými postupmi (alebo aspoň s niektorým z nich), ktoré budú pri riešení danej úlohy potrebné. Zároveň zvaží, či žiakovi nehrozí iný typ bariéry, ktorá by mohla brániť jeho úspešnému postupu pri riešení úlohy. Výnimku predstavujú situácie, keď napríklad učiteľ zámerne využíva úlohu a jej riešenie na modelovanie určitej riešiteľskej stratégie.

Pri zadávaní úloh je dôležité zohľadniť ich kognitívnu náročnosť a úroveň výzvy vzhľadom na kognitívnu vyspelosť žiaka ako riešiteľa. Zadaná úloha by nemala byť príliš jednoduchá, pretože v takom prípade nepredstavuje pre žiaka podnet ani výzvu a žiak zotrváva vo svojej komfortnej zóne; zároveň však nesmie byť ani príliš náročná, aby nevyvolávala frustráciu.

Ako ukážku možného použitia scaffoldingu sme si zvolili úlohu z externej časti maturity z matematiky z roku 2018 (úloha č. 10), ktorej súčasťou je aj schéma na Obr. 1:

„Jazdecký klub plánuje vybudovať pri stajni ohradený obdĺžnikový výbeh s čo najväčšou rozlohou. Plán oplozenia výbehu je znázornený na obrázku. Na oplozenie (vyznačené hrubou čiarou) použijú 200 metrov pletiva. Koľko metrov štvorcových bude mať tento výbeh?“ (NIVAM, 2018a, str. 3)



Obr. 1: Obrázok z úlohy z externej časti maturitnej skúšky z matematiky (zdroj: NIVAM, 2018a, str. 3)

Táto otvorená slovná úloha je zaradená do tematického celku Funkcie a podľa sledovanej kognitívnej úrovne overuje schopnosť transferu poznatkov. Úloha dosiahla obťažnosť 64,8 % a neriešenosť 11 %. (NIVAM, 2018b)

Uvedenú úlohu využívame pri príprave budúcich učiteľov matematiky na ilustráciu rôznych riešiteľských stratégií a ich implementácie do vyučovania. Naše skúsenosti ukazujú, že študenti často nevedia, ako sa do riešenia pustiť (úlohu neuvádzame ako aplikačnú pri téme kvadratická funkcia), alebo si vyhľadajú na internete tvrdenie, že dlhšia strana výbehu musí byť dvojnásobkom kratšej. Dôvod tejto podmienky však nepoznajú; preberú ju len ako „platný fakt“. Takto získaná informácia však nepodporuje porozumenie, ale vedie k formálnemu a povrchovému riešeniu úlohy. (To, že danú slovnú úlohu študenti na vysokej škole nevedia vyriešiť, pripisujeme prevažne teoretickému charakteru vysokoškolskej matematiky a akémusi „odtrhnutiu sa“ od matematiky základnej a strednej školy.) V ďalšom texte sa venujeme riešeniu úlohy s ohľadom na uvedené štyri fázy riešenia a možnosť využitia scaffoldingu pri riešení.

1. Porozumenie úlohe

Pri zadávaní úlohy sa učiteľ uistí, či žiak rozumie zadaniu čiastkovo aj ako celku. Ak porozumeniu bráni nejasnosť (napr. cudzie či neznáme slovo), učiteľ zadanie či jeho časti vysvetlí. V prípadoch, ktoré nepredstavujú poruchy čítania (pri ktorých je potrebné pracovať s textom špecifickým spôsobom), môže učiteľ využiť otázky podobné tým, ktoré G. Polya formuloval v rámci heuristického riešenia problémov, napríklad:

Čo sú známe údaje? Čo je neznáme? Aká je podmienka? Je možné splniť podmienku? Je podmienka postačujúca na určenie neznámej? Alebo je nedostatočná? Je nadbytočná? Alebo si protirečiaca?

V mnohých matematických úlohách je takmer nevyhnutné vizualizovať situáciu vystupujúcu v zadaní úlohy. Učiteľ preto môže poskytnúť žiakovi pokyny typu: *Nakresli obrázok. Zaved' vhodné označenie.* a takto ho posunúť v riešení.

V danej slovnej úlohe je známym údajom dĺžka oplozenia výbehu obdĺžnikového tvaru (200 metrov), ktorá predstavuje jeho obvod (okrem jednej strany obdĺžnika). Až pri označení a zakreslení strán obdĺžnika do náčrtu (Obr. 2) si riešiteľ môže uvedomiť, že jedna strana

obdĺžnika je tvorená stenou stajne. Do obvodu sa započítavajú preto len tri strany obdĺžnika, resp. ich dĺžky ($200 = y + x + y$). Tento moment poukazuje na kľúčový význam vizualizácie situácie zo zadania pri porozumení štruktúre úlohy. Neznámou je obsah tohto obdĺžnika. Podmienka vystupujúca v zadaní hovorí o tom, že obdĺžnik má byť čo najväčší, teda $S = x \cdot y = \max$. Je možné diskutovať so žiakom/žiakmi, či informácia o obvode a táto podmienka sú postačujúce alebo nedostatočné na určenie maximálneho obsahu obdĺžnika, resp. obsahu vo všeobecnosti, teda ako (a či vôbec) ovplyvňuje obvod útvaru jeho obsah.



Obr. 2: Vyznačené dĺžky strán výbehu (zdroj: vlastný)

2. Navrhnutie plánu riešenia

V tejto etape žiak zvažuje, akú stratégiu alebo kombináciu stratégií zvolí pri riešení úlohy. Najprv predstavíme experimentálny postup, založený na systematickom skúmaní hodnôt a ich vzťahov. Následne uvádzame „očakávané“ riešenie na úrovni stredoškolskej matematiky, ktoré sa opiera o vlastnosti kvadratickej funkcie. Pre úplnosť dopĺňame aj ďalší postup využívajúci nástroje diferenciálneho počtu. Tento postup je určený študentom stredných škôl, ktorí už ovládajú základy vyššej matematiky a dokážu pracovať s deriváciami. Heuristický postup je naopak adresovaný mladším riešiteľom (8. – 9. ročník základnej školy), ktorých funkčné myslenie sa ešte len formuje. V tomto kontexte plní úlohu podpornej stratégie, ktorá umožňuje vstup do problému intuitívnou cestou. Zároveň je určený aj tým žiakom/riešiteľom, ktorí zatiaľ nedokážu úlohu vyriešiť „školskou“ cestou, no prostredníctvom experimentovania sú schopní identifikovať kľúčové vzťahy a formulovať riešiteľskú hypotézu.

Z didaktického hľadiska tento postup predstavuje formu laterálneho scaffoldingu, keďže ponúka alternatívnu reprezentáciu problému, ktorá podporuje rozvoj funkcionálneho myslenia a pripravuje pôdu pre jeho formálne spracovanie.

Kľúčovým konceptom úlohy a jej riešenia pre všetky stratégie je funkčná závislosť vyjadrená dvoma vzťahmi:

$$\begin{aligned} 200 &= y + x + y \\ S &= x \cdot y = (200 - 2y) \cdot y = -2y^2 + 200y \end{aligned}$$

Očakávané riešenie úlohy je založené na určení súradníc vrchola paraboly kvadratickej funkcie ($f: y = ax^2 + bx + c$, a, b, c – reálne čísla, $a \neq 0$).

3. Realizácia plánu

V tejto etape postupuje žiak po jednotlivých krokoch podľa zvolenej jednej stratégie alebo ich vhodnej kombinácie.

Prvá riešiteľská stratégia je *systematické experimentovanie*. Postupujeme tak, že systematicky sa vypíšu dvojice čísel x, y predstavujúcich rozmery obdĺžnikového výbehu a zviazaných podmienkou $200 = y + x + y$. Hľadá sa, pri ktorej dvojici x, y bude obsah obdĺžnika najväčší. Keďže tých možností je veľa, je vhodné začať odhadom (v našom prípade to bude dĺžka strany y ako násobok desiatky) a neskôr sú overované spresnené hodnoty – Tab. 1. Vidíme, že obsah sa postupne zväčšuje a maximum nadobúda pre $y = 50$ m, potom zase symetricky klesá.

Samozrejme, že dĺžka rozmerov x, y nemusí byť celočíselná, preto pre „istotu“ môžeme overiť aj desatinné hodnoty y (napr. 49,8 m, 49,9 m, 50,1 m, 50,2 m). Je zrejmé, že nie vždy môže byť úloha takto „šťastne“ zostavená (práve s jedným riešením. Nevýhodou je aj časová náročnosť tejto stratégie.

Tabuľka 1: Systematické experimentovanie (zdroj: vlastný)

Dĺžka strany y (m)	Dĺžka strany x ($x = 200 - 2y$) (m)	Obsah obdĺžnika $S = x \cdot y$ (m ²)
10	180	1 800
20	160	3 200
30	140	4 200
40	120	4 800
50	100	5 000
60	80	4 800
70	60	4 200
80	40	3 200
90	20	1 800
48	104	4 992
49	102	4 998
50	100	5 000
51	98	4 998
52	96	4 992

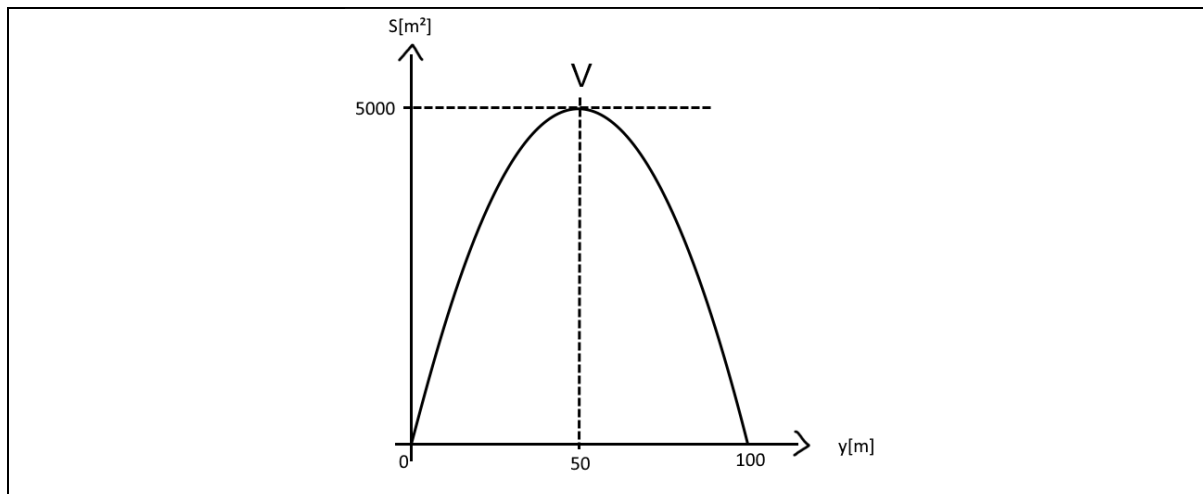
Učiteľ môže jednotlivé kroky pri riešení kontrolovať a klásť žiakovi otázky:

„Vidíš jasne, že krok je správny? Vieš dokázať, že je správny?“

Takisto je jasné, že v prípade potreby môže učiteľ (či rovesník) žiakovi poskytovať návody pre jednotlivé kroky.

Pri „očakávanom“ postupe žiak pracuje so zostaveným predpisom pre kvadratickú funkciu. Pre výpočet súradníc vrcholu kvadratickej funkcie $f: y = ax^2 + bx + c$ je možné použiť vzorec $V = \left[-\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a} \right]$ (v prípade našej riešenej úlohy je to funkcia $S = -2y^2 + 200y$). Ak žiak nevie/nepamätá si vzorec, učiteľ ho môže upozorniť na symetriu grafu kvadratickej funkcie, vďaka čomu prvú súradnicu vrcholu je možné určiť ako aritmetický priemer prvých súradníc

priesečníkov grafu funkcie s vodorovnou osou (Obr. 3). Priesečníkmi sú body so súradnicami $y_1 = 0$, $y_2 = 100$, vrchol paraboly má teda prvú súradnicu rovnú 50. Druhá súradnica vrcholu je dopočítaná ako funkčná hodnota $S(50) = -2y^2 + 200y = 5\,000$. Vo vrchole nadobúda funkcia S svoju maximálnu hodnotu a to $5\,000\text{ m}^2$. Túto riešiteľskú stratégiu môžeme nazvať *školská*, pretože sa opiera o poznatky získané na hodinách matematiky.



Obr. 3: Graf kvadratickej funkcie z úlohy (zdroj: vlastný)

Pri ďalšej stratégii vychádzame z rovnakého vyjadrenia obsahu obdĺžnika ako funkcie jednej zo strán obdĺžnika

$$S(y) = (200 - 2y) \cdot y = -2y^2 + 200y.$$

Je potrebné nájsť bod, v ktorom nadobúda $S(y)$ svoje maximum. Extrém nadobúda funkcia v bode, kde je jej prvá derivácia nulová. Zderivovaním funkcie $S(y)$ podľa premennej y dostaneme

$$S'(y) = -4y + 200.$$

Položením prvej derivácie funkcie rovnú nule, získame

$$-4y + 200 = 0,$$

z ktorej vypočítame $y = 50\text{ m}$.

Druhou deriváciou funkcie $S''(y) = -4$, si overíme, že naozaj funkcia S nadobúda v bode $y = 50\text{ m}$ lokálne maximum. Pri dopočítaní vypočítame, že $x = 100\text{ m}$. Maximálna výmera výbehu bude teda $5\,000\text{ m}^2$. Aj túto stratégiu je možné zaradiť medzi *školské*.

4. Pohľad späť

Štvrtá etapa riešiteľského procesu predstavuje priestor pre reflexiu, evaluáciu a hľadanie alternatívnych prístupov. Dôležitú úlohu tu zohráva reflexívny scaffolding, ktorého cieľom je podporiť žiakov pri hodnotení vlastného riešenia, preverovaní jeho stability a pri úvahách o možných variantoch postupu (Srinivas & Gireesh, 2025).

Učiteľ v tejto etape zhodnocuje doteraz dosiahnuté výsledky a ponúka podporné otázky typu: „*Funguje to, čo si vytvoril?*“, čím žiakov vedie k tomu, aby sa na svoje riešenie pozerali s odstupom a kritickým nadhľadom.

Kľúčovou požiadavkou je, aby riešenie bolo skontrolovateľné a aby žiak mal príležitosť identifikovať a opraviť prípadné chyby. Učiteľ preto zisťuje, či žiak dokáže vysvetliť svoj postup a podnecuje ho na overovanie a evaluáciu prostredníctvom otázok:

„Ako si na to prišiel? Prečo si myslíš, že je to správne riešenie? Napíš, ako si dospel k výsledku a over si ho spätným výpočtom.“ Súčasťou reflexie je aj analýza dôsledkov: *„Čo ste zistili? Ako sa menili premenné? Prečo si myslíte, že sa to dialo?“*

Aj v prípade správneho výsledku učiteľ cielene podporuje diskusiu o alternatívnych prístupoch. Do hry tu vstupuje aj laterálny scaffolding, ktorý je predpokladom flexibilného učenia. Umožňuje prispôbiť podporu individuálnym potrebám žiakov a tým zvyšuje ich angažovanosť aj schopnosť prenášať poznatky do nových situácií (Srinivas & Gireesh, 2025). Pýta sa:

„Ako by bolo možné realizovať riešenie inak? Mohol by byť cieľ dosiahnutý pomocou odlišných výpočtov alebo s menším počtom prvkov? Čo by sa stalo, keby sme zmenili podmienky? Ako by si podobnú úlohu riešil nabudúce?“

Takéto otázky otvárajú priestor pre variabilitu, prevoditeľnosť stratégie a budovanie riešiteľskej flexibility.

Súčasťou štvrtej etapy môže byť aj opakovanie s obmenou, aby sa žiak nesústredil len na pasívne zopakovanie známeho postupu, ale aby dokázal riešenie vysvetliť, demonštrovať či modifikovať. Pri analýze riešenia učiteľ využíva silu sociálnej skupiny: porovnávanie výsledkov a postupov v rámci triedy rozširuje žiakom obzor alternatív a súčasne vytvára priestor pre interaktívny scaffolding (Srinivas & Gireesh, 2025).

Zhrnutie

Príspevok zhrňuje kľúčové teoretické východiská scaffoldingu so zameraním na jeho rôzne formy, najmä na laterálny scaffolding, ktorý sa javí ako perspektívny nástroj podpory žiaka v procese riešenia matematických úloh bez toho, aby narúšal autonómiu riešiteľa.

Súčasne boli predstavené možné aplikácie scaffoldingu v didaktickej praxi, ktoré poukazujú na jeho flexibilitu a potenciál diferencovať podporu v závislosti od úrovne porozumenia či riešiteľskej stratégie žiakov.

Analýza vybranej úlohy z externej časti maturitnej skúšky demonštrovala, ako by systematicky koncipovaný scaffolding mohol vstupovať do jednotlivých etáp riešiteľského procesu. Ukázali sme, že cielene formulované podporné otázky a pokyny môžu napomôcť žiakovi pri porozumení úlohe, tvorbe riešiteľského plánu, realizácii plánu aj následnej verifikácii výsledku a „poobhliadnutí sa“.

G. Polya vo svojej knihe uvádza (1957, s. 1):

„Jednou z najdôležitejších úloh učiteľa je pomáhať svojim študentom. Táto úloha nie je celkom jednoduchá, vyžaduje si čas, prax, oddanosť a zdravé zásady.“

Pomoc učiteľa musí byť premyslená. Výsledky naznačujú, že využívanie scaffoldingu (vrátane laterálneho scaffoldingu) predstavuje účinný didaktický prostriedok, ktorý môže podporovať matematické myslenie, reflexiu a samostatnosť žiakov.

Zároveň sa otvára priestor pre ďalší výskum zameraný na modelovanie úrovni podpory v rôznych fázach riešiteľského procesu, ako aj na empirické overovanie účinnosti jednotlivých typov scaffoldingu v autentických edukačných situáciách.

Literatúra

- Amiripour, P., Amir-Mofidi, S., & Shahvarani, A. (2012). Scaffolding as effective method for mathematical learning. *Indian Journal of Science and Technology*, 5(9), 1–4. 3328–3331. Available from: <https://doi.org/10.17485/ijst/2012/v5i9.6> [viewed 2025-11-22].
- Applebaum, M., Leikin, R. (2007). Looking back at the beginning: Critical thinking insolving unrealistic problems. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 4(2), 258–26.
- Bakker, A., Smit, J., & Wegerif, R. (2015). Scaffolding and dialogic teaching in mathematics education: introduction and review. *ZDM*, 47(7), 1047–1065. Available from: <https://doi.org/10.1007/s11858-015-0738-8> [viewed 2025-11-22].
- Buttuler, M. (2025). EEF Scaffolding in the Classroom: How to Use and Fade Support [online]. (14. novembra 2025) Available from: <https://www.oltinternational.net/blogs/blog/eef-scaffolding-fade-support-primary-secondary> [viewed 2025-11-22].
- Firnanda, G. I., & Susiswo. (2024). Analysis of students' dual processes in solving number pattern questions and providing scaffolding. *Journal Focus Action of Research Mathematic (Factor M)*, 7(2), 258–275. Available from: https://doi.org/10.30762/f_m.v7i2.3499 [viewed 2025-11-22].
- Isnania, I., Huda, N., & Hariyanto, H. (2021). Scaffolding on student construction errors in mathematics problem solving. *Indonesian Journal of Science and Mathematics Education*, 4(3), 313–323. Available from: <https://doi.org/10.24042/ij sme.v4i3.10173> [viewed 2025-11-22].
- Jannah, U. R., Saleh, H., & Wahidah, A. (2019). Scaffolding untuk Pembelajaran Matematika di Kelas Inklusi. *JKPM (Jurnal Kajian Pendidikan Matematika)*, 5(1), Available from: <https://doi.org/10.30998/jkpm.v5i1.5254> [viewed 2025-11-22].
- Klerlein, J., Hervey, S. (2019). Mathematics as a Complex Problem-Solving Activity: Promoting Students' Thinking Through Problem-Solving. *Generation Ready White Paper*. Available online: <https://generationready.com/wp-content/uploads/2025/03/Mathematics-as-a-Complex-Problem-Solving-Activity.pdf> [viewed 2025-11-22].
- Kusmaryono, I., Gufron, A. M., & Rusdiantoro, A. (2020). Effectiveness of scaffolding strategies in learning against decrease in mathematics anxiety level. *NUMERICAL Jurnal Matematika Dan Pendidikan Matematika*, 13–22. Available from: <https://doi.org/10.25217/numerical.v4i1.770> [viewed 2025-11-22].
- Lajoie, S. P. (2005). Extending the scaffolding metaphor. *Instructional Science*, 33(5–6), 541–557
- Martin, N. D., Tissenbaum, C. D., Gnesdilow, D., & Puntambekar, S. (2018). Fading distributed scaffolds: the importance of complementarity between teacher and material scaffolds. *Instructional Science*, 47(1), 69–98. Available from: <https://doi.org/10.1007/s11251-018-9474-0> [viewed 2025-11-22].
- McLeod, S. (2025). Vygotsky's Zone of Proximal Development. In *Simply Psychology*. Available from: <https://www.simplypsychology.org/zone-of-proximal-development.html> [viewed 2025-11-22].
- Murdiyani, N. M. (2013). Scaffolding to Support Better Achievement in Mathematics. *PYTHAGORAS : Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*, 8(1), 84–91. Available from: <https://doi.org/10.21831/pg.v8i1.8496> [viewed 2025-11-22].
- Nance, A. (2024). 7 Scaffolding learning strategies for the classroom. University of San Diego - Professional & Continuing Education. Available from: <https://pce.sandiego.edu/scaffolding-in-education-examples/> [viewed 2025-11-22].
- Nugroho, P. (2017). Scaffolding meningkatkan kemampuan berpikir kritis dalam pembelajaran matematika. *Jurnal Silogisme Kajian Ilmu Matematika Dan Pembelajarannya*, 2(1), 15. Available from: <DOI:10.24269/JS.V2i1.500> [viewed 2025-11-22].
- Nurfadila, N. R. A., Utami, N. D. M., Im, N. F. a. J., & Rahmawati, N. P. (2024). Enhancing Algebraic Problem Solving Through Scaffolding: a Case Study of Indonesian Junior High School Students. *Proceeding of International*

Conference on Education and Sharia, 1, 700–707. Available from: <https://doi.org/10.62097/ices.v124.108> [viewed 2025-11-22].

NIVAM (2018a). Maturita 2018 – Externá časť. (kód testu 7070). Available from: https://www2.nucem.sk/dl/741/RT_MAT_7070_2018.pdf [viewed 2025-11-23].

NIVAM (2018b). Správa o výsledkoch riadneho termínu externej časti maturity z matematiky. Available from: https://www2.nucem.sk/dl/3843/MAT_-Spr%C3%A1va_o_v%C3%BDsledkoch_E%C4%8C_MS_2018_final.pdf [viewed 2025-11-23].

NIVAM (2019). PISA 2018, Národná správa, Slovensko. Available from: https://www2.nucem.sk/dl/4636/Narodna_sprava_PISA_2018.pdf [viewed 2025-11-23].

NIVAM (2023). PISA 2022. Available from: https://www2.nucem.sk/dl/5944/tvorive%20myslenie_KRATKA_SPRAVA_final.pdf [viewed 2025-11-23].

Piaget, J., & Inhelder, B. (1997). Psychologie dítěte. Praha: Portál, 1997, 144 s.

Polya, G. (1957). How To Solve It. Second Edition. Princeton University Press, New Jersey.

Rachmawati, L. N., Sah, R. W. A., Hasanah, S. N., & Hazarika, A. (2023). Newman and scaffolding stages in analyzing student errors in solving algebraic problems. Delta-Phi Jurnal Pendidikan Matematika, 1(1), 01–05. Available from: <https://doi.org/10.61650/dpjp.v1i1.30> [viewed 2025-11-22].

Salam, M., Ndia, L., Misu, L., & Jafar, J. (2024). Applying scaffolding technique in problem based learning model on students' mathematics problem solving ability. European Journal of Educational and Development Psychology, 12(3), 50–63. Available from: <https://doi.org/10.37745/ejedp.2013/vol12n35063> [viewed 2025-11-22].

Srinivas, P., & Gireesh, D. S (2025). A Comprehensive Analysis of Lateral Scaffolding Techniques in Enhancing Student Math Problem Solving. International Journal of Mathematical Education, 15(1). ISSN 0973-6948, 7-15. Available from: <https://dx.doi.org/10.37622/IJoME/15.1.2025> [viewed 2025-11-22].

Vygotsky, L. S. (1978). Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Wheeler, S. (2022). Learning theories: Jerome Bruner on the Scaffolding of Learning. In TeachThought. Available from: <https://www.teachthought.com/learning/jerome-bruner/> [viewed 2025-11-22].

Wood, D. J., Bruner, J. S., & Ross, G. (1976). The role of tutoring in problem solving. Journal of Child Psychology and Psychiatry, 17(2), 89-100. Available from: <https://doi.org/10.1111/j.1469-7610.1976.tb00381.x> [viewed 2025-11-22].

Zeng, W. (2024). An exploration of difficult Problem-Solving Strategies in Inquiry-Based Learning teaching Practices based on the Creation Orientation Perspective—Taking the secondary school math curriculum as an example. Advances in Education, 14(08), 1169–1174. Available from: <https://doi.org/10.12677/ae.2024.1481537> [viewed 2025-11-22].

Zumbach, J., Reimann, P. (2003). Influence of Feedback on Distributed Problem Based Learning. In: Wasson, B., Ludvigsen, S., Hoppe, U. (eds) Designing for Change in Networked Learning Environments. Computer-Supported Collaborative Learning, vol 2. Springer, Dordrecht. Available from: https://doi.org/10.1007/978-94-017-0195-2_28 [viewed 2025-11-22].